

Processamento de Malhas Poligonais

Tópicos Avançados em Computação Visual e Interfaces I

Prof.: Anselmo Montenegro

www.ic.uff.br/~anselmo

anselmo@ic.uff.br

Conteúdo: Notas de Aula

Simplificação

Introdução

Introdução

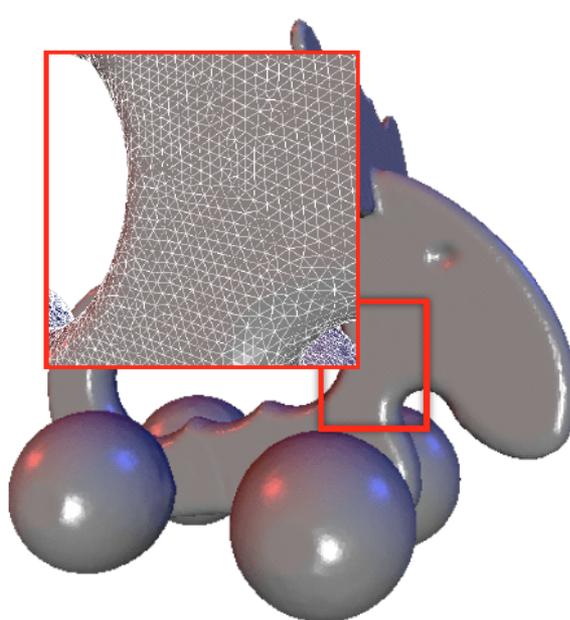
- Algoritmos para simplificação e aproximação de malhas formam um classe de algoritmos que buscam **transformar um malha poligonal em outra, com poucas faces, vértices e arestas**
- Ambos os procedimentos são controlados por critérios definidos pelo usuário que favorecem uma ou outra propriedade existente nos dados originais
- Existem várias aplicações mas a mais óbvia é **reduzir a complexidade dos dados**

Introdução

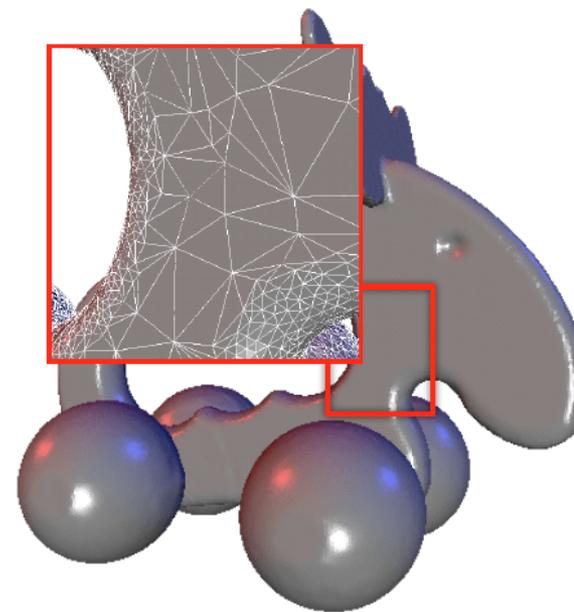
- Algoritmos para simplificação e aproximação de malhas formam um classe de algoritmos que buscam **transformar um malha poligonal em outra, com poucas faces, vértices e arestas**
- Ambos os procedimentos são controlados por critérios definidos pelo usuário que favorecem uma ou outra propriedade existente nos dados originais
- Existem várias aplicações mas a mais óbvia é **reduzir a complexidade dos dados**

Aplicações

- **Tratamento de dados com amostragem excessiva**



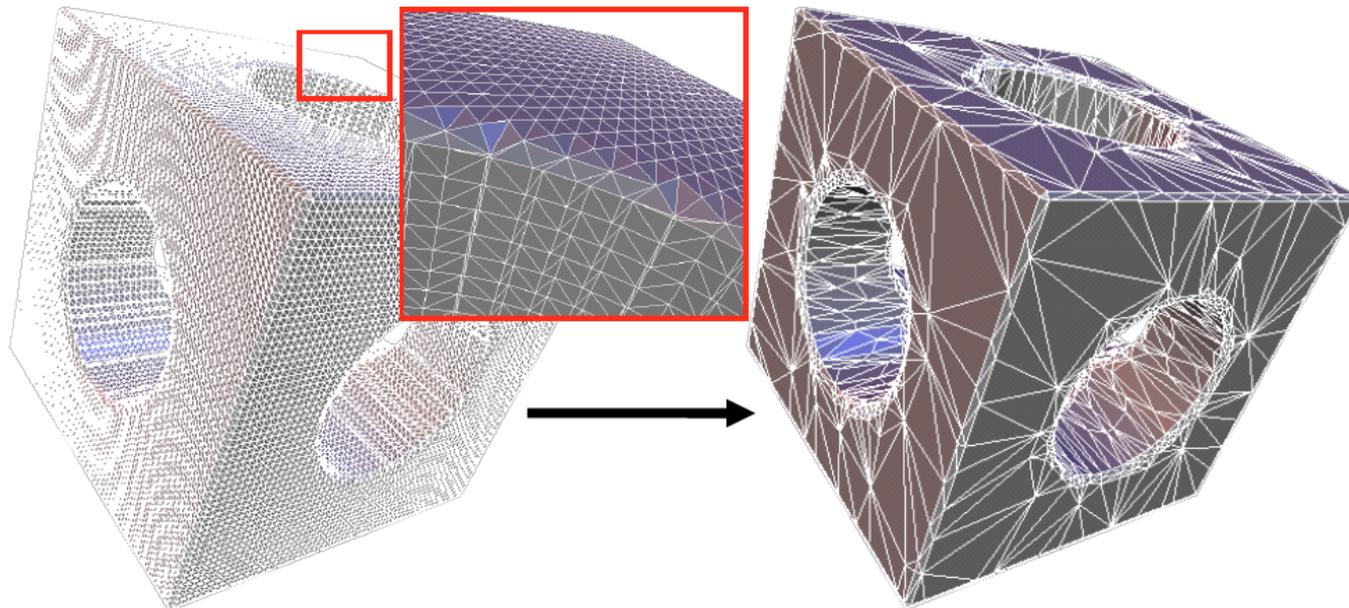
~150k triangles



~80k triangles

Aplicações

- **Redução de tesselação excessiva**

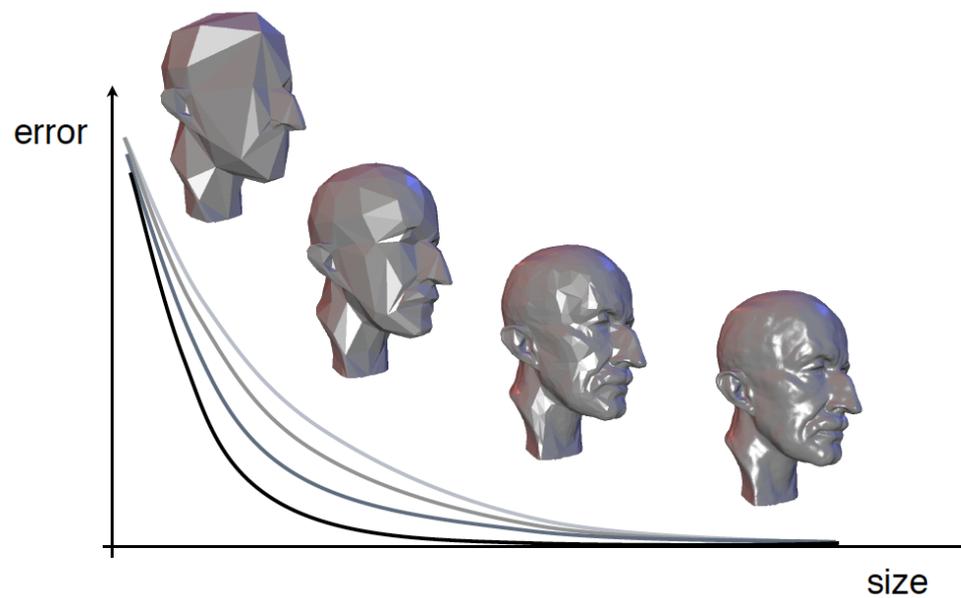


Aplicações

- **Adaptação a limitações de hardware**



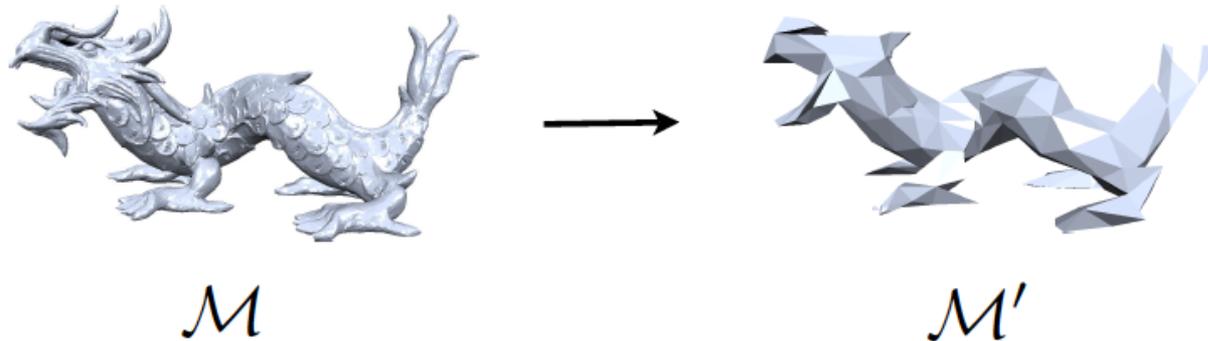
Compromisso entre erro e tamanho



Problema de simplificação de uma malha de triângulos

Dada uma malha de triângulos M , determinar uma nova malha M' tal que:

- 1) Minimize $\|M' - M\| < \varepsilon$ para $|V'| = n < |V|$
- 2) Minimize $|V'|$ para $\|M' - M\| = \varepsilon$



Problema de simplificação de uma malha de triângulos

Dada uma malha de triângulos M , determinar uma nova malha M' tal que:

- 1) Minimize $\|M' - M\| < \varepsilon$ para $|V'| = n < |V|$
- 2) Minimize $|V'|$ para $\|M' - M\| = \varepsilon$

É um problema de otimização difícil

Problema de simplificação de uma malha de triângulos

Dada uma malha de triângulos M , determinar uma nova malha M' tal que:

- 1) Minimize $\|M' - M\| < \varepsilon$ para $|V'| = n < |V|$
- 2) Minimize $|V'|$ para $\|M' - M\| = \varepsilon$

Soluções sub-ótimas podem ser obtidas considerando-se critérios adicionais de suavidade como:

desvio de normais, forma dos triângulos, etc

Métodos de simplificação

- Clustering de vértices
- Decimação iterativa
- Four-faced clustering

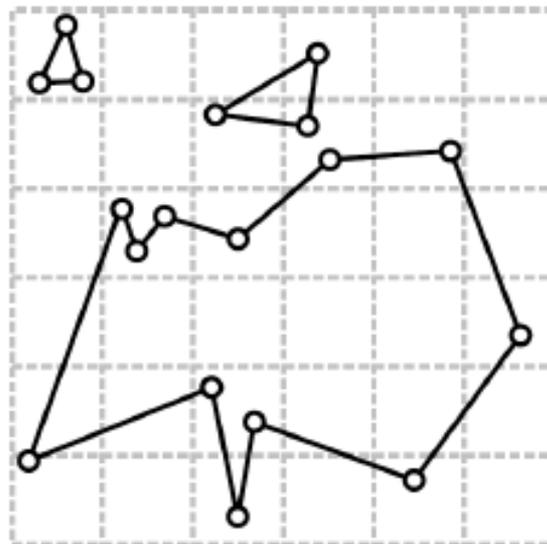
Clusterização de vértices [Rossignac and Borrel 93].

Etapas:

1. Geração do Cluster
2. Cálculo do vértice representante de cada cluster
3. Geração da malha
4. Correção topológica

Clusterização de vértices

Dada uma tolerância ϵ , construir uma partição do espaço ambiente em torno do objeto com células de diâmetro menor que ϵ



Clusterização de vértices

Abordagem hierárquica

Pode ser Bottom-up ou Top-down



Clusterização de vértices

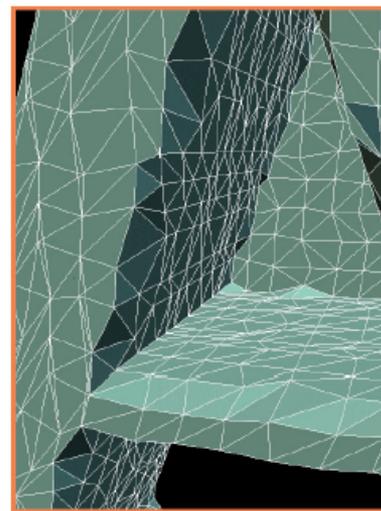
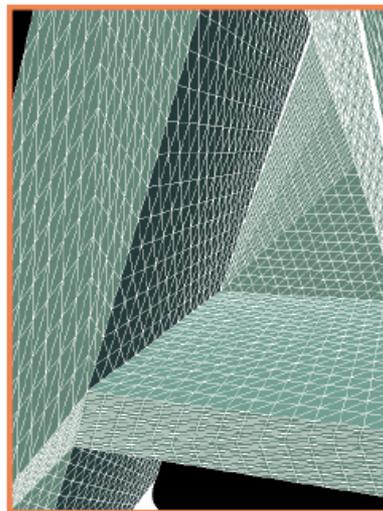
Cálculo do representante: - determinar a posição de um vértice representativo para todos os vértices contidos em uma célula

Pode ser feito de diferentes formas:

- Média das coordenadas dos vértices
- Mediana
- Funções quádricas do erro

Clusterização de vértices

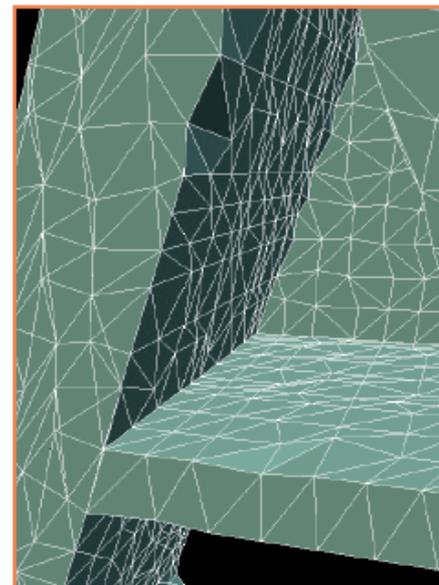
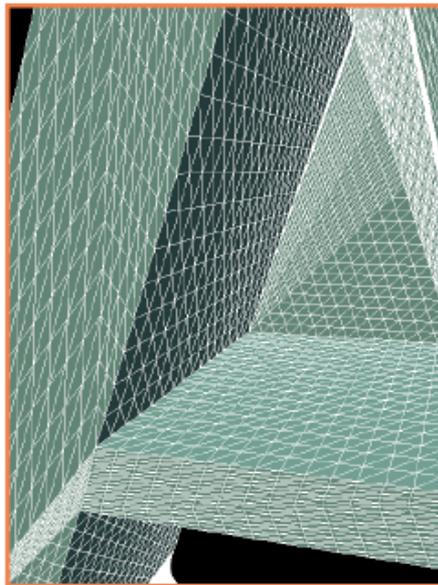
Média das coordenadas



Average vertex position → Low-pass filter

Clusterização de vértices

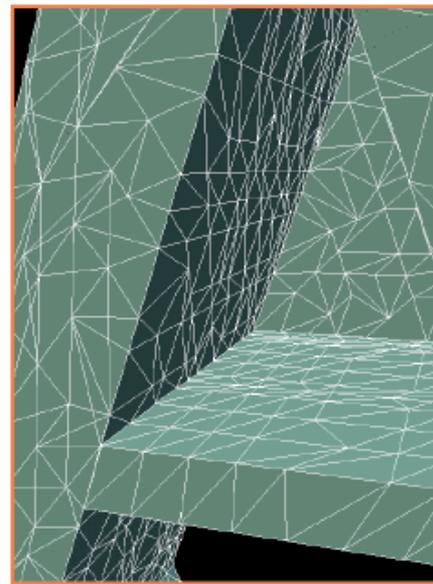
Mediana das coordenadas



Median vertex position → Sub-sampling

Clusterização de vértices

Quádricas



Error quadrics

Clusterização de vértices

Quádricas: ideia determinar o ponto que minimiza a distância aos planos determinados pela região em uma célula

$$p = (x, y, z, 1)^T, \quad q = (a, b, c, d)^T$$

ponto plano

$$\text{dist}(q, p)^2 = (q^T p)^2 = p^T (qq^T) p =: p^T Q_q p$$

Distância
quadrática
do ponto
ao plano

$$Q_q = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & b^2 & cd \\ ad & bd & cd & d^2 \end{bmatrix}$$

← quádrica

Clusterização de vértices

Quádricas:

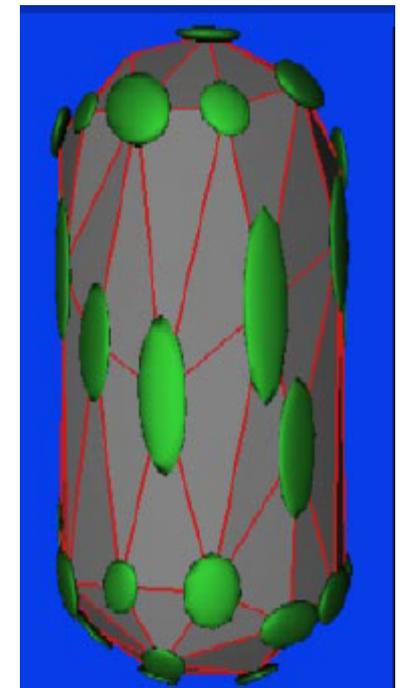
Uma matriz quádrlica associa um único número real $p^T Q_q p$ a cada ponto p

Descreve um polinômio de segundo grau

Representa uma superfície: elipsóide, parabolóide ou hiperbolóide

Se Q_q é positiva definida então descreve elipsóides

$$Q_q = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & b^2 & cd \\ ad & bd & cd & d^2 \end{bmatrix}$$



Clusterização de vértices

Soma das quádricas definidas pelos planos do vértice

$$\sum_i dist(q_i, p)^2 = \sum_i p^T Q_{q_i} p = p^T \left(\sum_i Q_{q_i} \right) p =: p^T Q_p p$$

O representante pode ser determinado minimizando

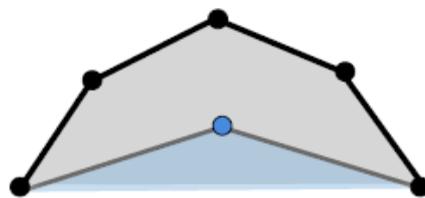
$$\sum_i dist(q_i, p)^2 :$$

Clusterização de vértices

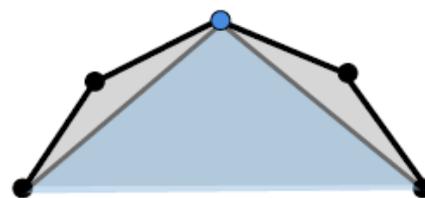
A minimização é obtida resolvendo um problema de mínimos quadrados:

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} p^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

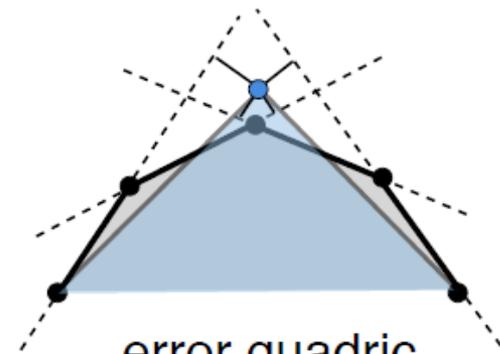
Comparação



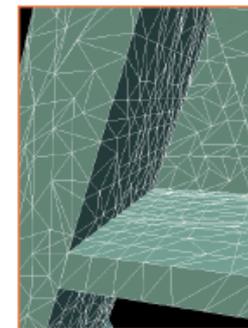
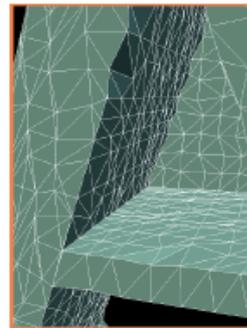
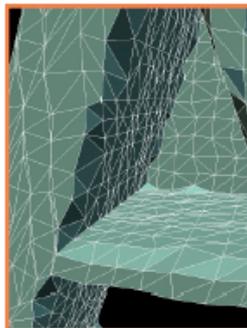
average



median



error quadric



Clusterização de vértices

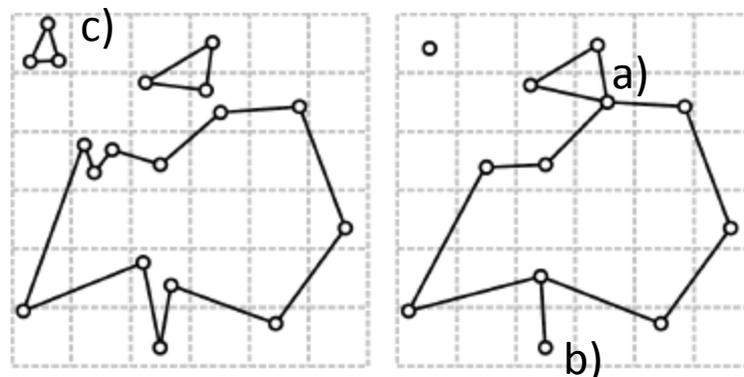
Geração da malha: - conectar os vértices representativos de dos clusters

- Considere os clusters $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ e $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$
- Considere p representante de P e q representante de Q
- Conecte p a q se existe uma aresta original entre p_i e q_i

Clusterização de vértices

Problemas topológicos: a malha pode deixar de ser uma variedade topológica se:

- diferentes componentes conexos passam por um célula
- se duas faces que compartilham um vértice contém cada uma vértices distintos em uma mesma célula
- se todos os vértices de uma componente estão na mesma célula



Decimação incremental

Remove um vértice da malha por vez

Em cada passo, o **melhor candidato é determinado** por um critério especificado pelo usuário

Critérios podem ser:

- Binários (remove ou não remove)
- Contínuos (mede a qualidade da malha após a remoção)

Decimação incremental

Binários – critérios binários estão associados ao erro de aproximação global (não removemos vértices que causam um erro maior)

Contínuos – estão ligados a uma noção de adequabilidade (fairness) que pode ser:

- Isotropia dos triângulos
- Razão de aspecto dos triângulos
- Variação nas normais em uma vizinhança

Decimação incremental

Algoritmo Geral:

Repeat:

 pick mesh region

 apply decimation operator

Until no further reduction possible

Decimação incremental

Algoritmo Geral:

Repeat:

pick mesh region

apply decimation operator

Until no further reduction possible

Obs: uma região pode ser um único vértice ou uma aresta

Decimação incremental

Algoritmo Guloso:

```
For each region  
  evaluate quality after decimation  
  enqueue(quality, region)
```

Repeat:

```
  pick best mesh region  
  apply decimation operator  
  update queue
```

```
Until no further reduction possible
```

Obs: uma região pode ser um único vértice ou uma aresta

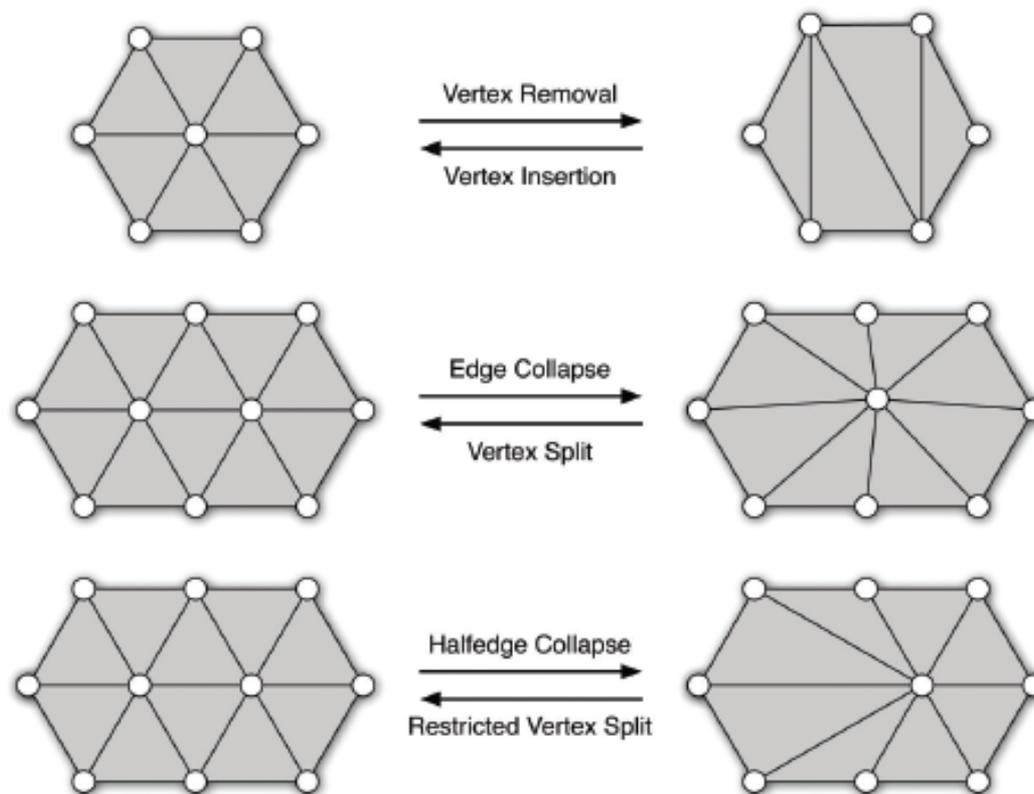
Decimação incremental (reavaliação)

- Após a remoção, a superfície muda em uma vizinhança
- O critério deve ser reavaliado e é o passo mais custoso
- Utiliza-se uma estrutura de heap para preservar a ordem dos candidatos
- Candidatos a serem reavaliados são removidos do heap, reavaliados e re-inseridos
- Complexidade de $\log(n)$

Decimação incremental (operadores topológicos)

- Devem ser os mais simples o possível
- Se precisamos preservar topologia devemos utilizar Operadores de Euler
- Tipos de operadores:
 - Remoção de vértices
 - Colapso de aresta
 - Colapso de half-edge
 - Operadores estelares

Decimação incremental (operadores topológicos)



Decimação incremental (operadores topológicos)

- Devem ser os mais simples o possível
- Se precisamos preservar topologia devemos utilizar Operadores de Euler
- Tipos de operadores:
 - Remoção de vértices
 - Colapso de aresta
 - Colapso de half-edge
 - Operadores estelares

Decimação incremental (operadores topológicos)

- Remoção de vértices – remove um vértice mais os triângulos adjacentes
 - Para um vértice de valência k gera um buraco de k lados
 - $k-2$ graus de liberdade na retriangulação do buraco
 - O número de triângulos resultante é $k-2$
 - Logo, remove 1 vértice, 3 arestas e 2 triângulos

Decimação incremental (operadores topológicos)

- Colapso de arestas – toma dois vértices adjacentes p e q , colapsa a aresta entre eles e move ambos os vértices para uma nova localização r
 - Dois triângulos degenerados podem ser removidos da malha
 - Remove um vértice, três arestas e dois triângulos
 - O grau de liberdade está na especificação de r

Decimação incremental (operadores topológicos)

- Colapso de halfedges $HC(p,q)$ – dado dois vértices p e q conectados por uma aresta, p é movido em direção a q
 - Pode ser visto como um caso particular do **Colapso de Arestas** ou **Remoção de Vértices**
 - A remoção $HC(p,q)$ é tratada de forma independente de $HC(q,p)$ e devem ser avaliadas e armazenadas no heap individualmente
 - Faz uma subamostragem em oposição ao **Colapso de Arestas** que faz uma filtragem passa baixa

Decimação incremental (operadores topológicos)

O Colapso de HalfEdges é uma operação válida somente se satisfaz as seguintes condições:

Se p e q são vértices na fronteira da malha então (p,q) é uma aresta da fronteira

Para todos os vértices r incidentes a p e q , deve existir um triângulo (p,q,r) . A interseção dos 1-rings de p e q consiste somente dos vértices opostos a (p,q)

Decimação incremental (operadores topológicos)

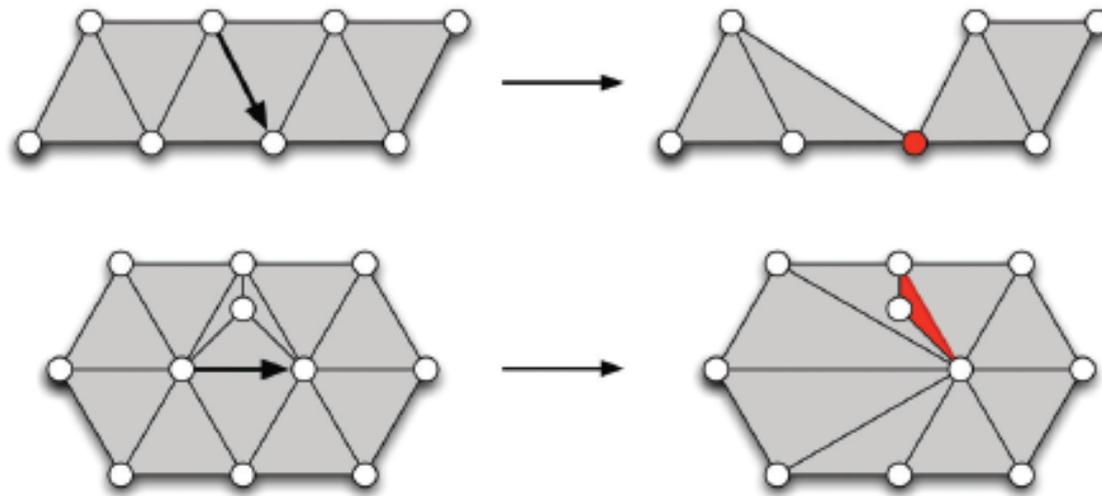


Figure 7.4. Two examples for topologically illegal (half-)edge collapses $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$. Collapsing two boundary vertices through the interior leads to a non-manifold pinched vertex (top). The one-rings of \mathbf{p} and \mathbf{q} intersect in more than two vertices, which after collapsing results in a duplicate fold-over triangle and a non-manifold edge (bottom).

Operadores Estelares

Seja Δ um complexo simplicial de dimensão n . Sejam δ e γ dois simplexes de Δ com dimensão r e $(n-r)$ respectivamente tais que $Link(\delta, \Delta) = \partial\gamma$.

Operadores Estelares

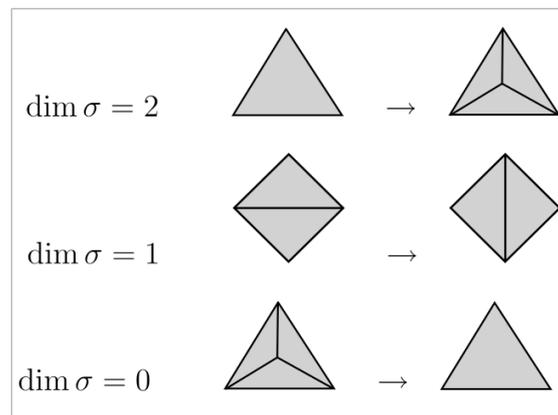
Seja Δ um complexo simplicial de dimensão n . Sejam δ e γ dois simplexes de Δ com dimensão r e $(n-r)$ respectivamente tais que $Link(\delta, \Delta) = \partial\gamma$.

A operação chamada *movimento biestelar* consiste em alterar Δ removendo $\delta \star \partial\gamma$ e adicionando $\partial\delta \star \gamma$.

Operadores Estelares

Seja Δ um complexo simplicial de dimensão n . Sejam δ e γ dois simplexes de Δ com dimensão r e $(n-r)$ respectivamente tais que $Link(\delta, \Delta) = \partial\gamma$.

A operação chamada *movimento biestelar* consiste em alterar Δ removendo $\delta \star \partial\gamma$ e adicionando $\partial\delta \star \gamma$.



Operadores Estelares

Seja Δ um complexo simplicial de dimensão n . Sejam δ e γ dois simplexes de Δ com dimensão r e $(n-r)$ respectivamente tais que $Link(\delta, \Delta) = \partial\gamma$.

A operação chamada *movimento biestelar* consiste em alterar Δ removendo $\delta \star \partial\gamma$ e adicionando $\partial\delta \star \gamma$.

Notação: $k(\delta, \gamma)$.

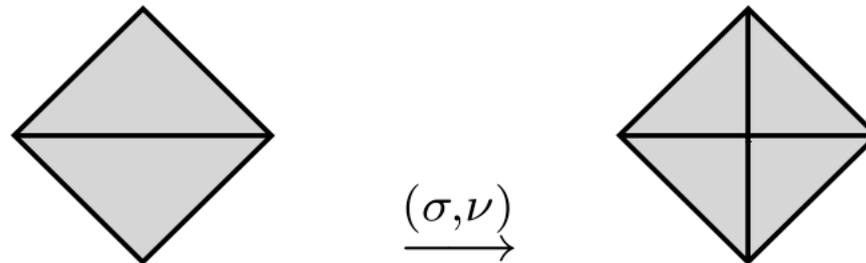
Operadores Estelares

Seja Δ um complexo simplicial de dimensão n . Seja δ um simplexo de Δ com dimensão r e v um vértice no interior de δ .

Operadores Estelares

Seja Δ um complexo simplicial de dimensão n . Seja δ um simplexo de Δ com dimensão r e v um vértice no interior de δ .

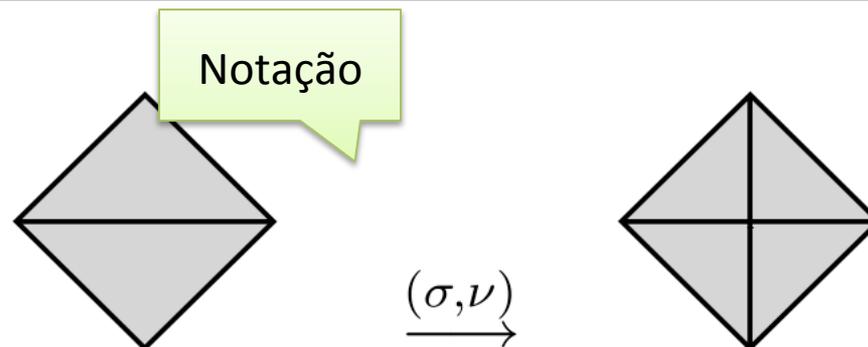
A operação chamada *subdivisão estelar* consiste em alterar Δ removendo $\overline{Star(\delta, \Delta)}$ e adicionando $v \star \partial\delta \star Link(\delta, \Delta)$.



Operadores Estelares

Seja Δ um complexo simplicial de dimensão n . Seja δ um simplexo de Δ com dimensão r e v um vértice no interior de δ .

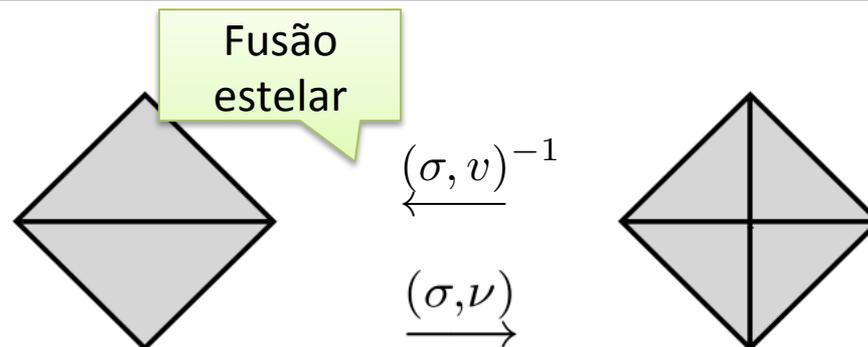
A operação chamada **subdivisão estelar** consiste em alterar Δ removendo $\overline{Star(\delta, \Delta)}$ e adicionando $v \star \partial\delta \star Link(\delta, \Delta)$.



Operadores Estelares

Seja Δ um complexo simplicial de dimensão n . Seja δ um simplexo de Δ com dimensão r e v um vértice no interior de δ .

A operação chamada **subdivisão estelar** consiste em alterar Δ removendo $\overline{Star(\delta, \Delta)}$ e adicionando $v \star \partial\delta \star Link(\delta, \Delta)$.



Operadores Estelares

Dois super teoremas ...

01 – Duas superfícies combinatórias são homeomorfas, se e somente se elas são biestelar equivalentes.

Operadores Estelares

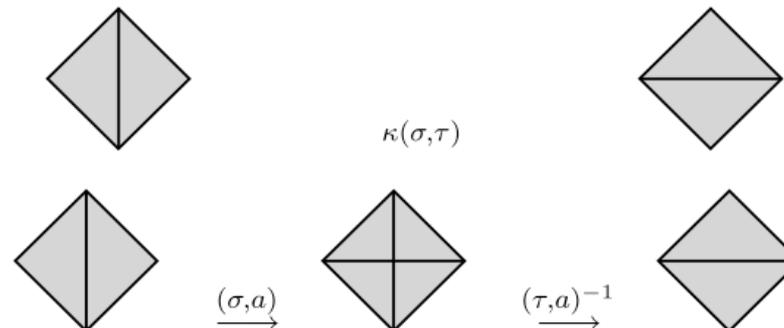
Dois super teoremas ...

- 01** – Duas superfícies combinatórias são homeomorfas, se e somente se elas são biestelar equivalentes.
- 02** – Qualquer movimento biestelar, pode ser decomposto em um conjunto finito de operações estelares, a saber $(\tau, \nu)^{-1}(\sigma, \nu)$.

Operadores Estelares

Dois super teoremas ...

- 01** – Duas superfícies combinatórias são homeomorfas, se e somente se elas são biestelar equivalentes.
- 02** – Qualquer movimento estelar, pode ser decomposto em um conjunto finito de operações estelares, a saber $(\tau, \nu)^{-1}(\sigma, \nu)$.



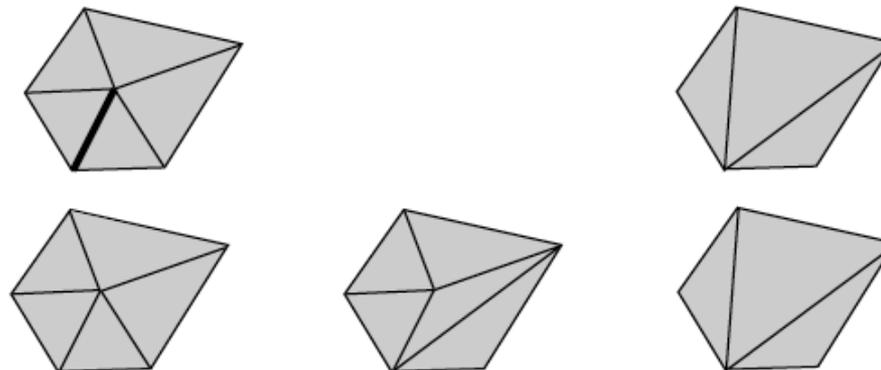
Operadores Estelares

Os operadores estelares podem ser usados como primitivas para a definição de operações de multiresolução.

Operadores Estelares

Os operadores estelares podem ser usados como primitivas para a definição de operações de multiresolução.

Ex: O colapso de arestas e a subdivisão de um vértice podem ser definidos como composições de operações estelares.



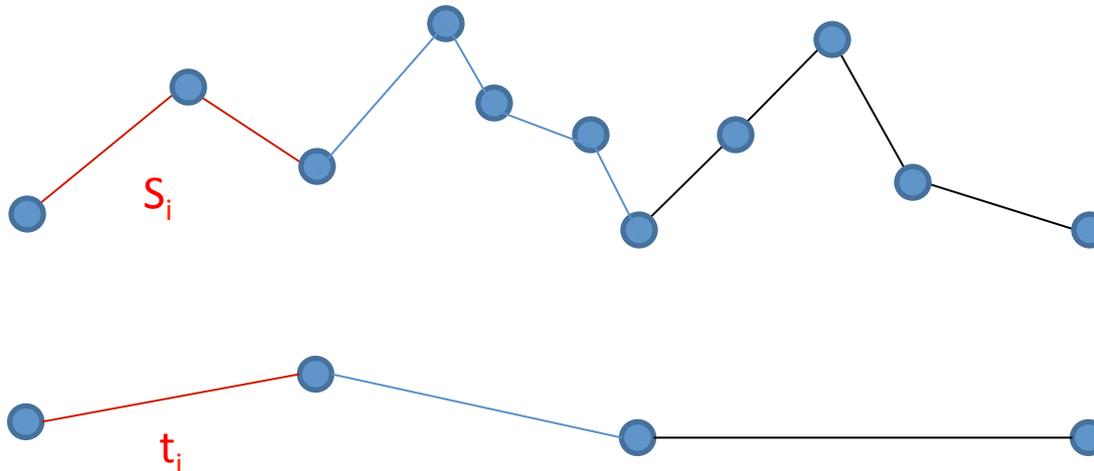
Medidas de Distância

- Como garantir a tolerância do erro de aproximação?
 - Precisamos medir o erro global da simplificação
 - Comparar duas superfícies é custoso
 - Precisamos de medidas aproximadas conservativas e que sejam rápidas para avaliação

Medidas de Distância

•Situação geral:

- Cada triângulo t_i na malha simplificada está associado ao um retalho S_i na malha original
- Necessário medir a distância entre t_i e os vértices ou faces de S_i



Medidas de Distância

- **Distância de Hausdorff:** mede distância entre conjuntos

$$H(A, B) = \max_{a \in A} \min_{b \in B} \|a - b\|$$

- $H(A, B) \neq H(B, A)$
- No caso de simplificação a direção correta é $H(A, B)$ onde A é a malha original e B a malha simplificada. Por que?
- Computacionalmente cara

Medidas de Distância

- **Erro acumulado:** armazena o valor de erro em cada triângulo e adiciona o novo erro cometido nos triângulos associados a cada operação de decimação
- Exemplo:
 - Na operação de colapso de arestas ocorre uma mudança ao movermos os vértices p e q de (p,q) para a nova posição r .
 - Para cada triângulo t_i adjacente a aresta (p,q) , calculamos o erro (distância) entre r e t_i

Medidas de Distância

•Quádricas de erro:

- Associa uma distância a cada vértice p_j da malha
- Estima o quadrado da distância de p_j a cada um planos de suporte dos triângulos no retalho S_i associado aos triângulos t_i adjacentes p_j

Medidas de Distância

•Quádricas de erro:

- Inicialmente calculamos Q_p para os vértices originais da malha
- Quando uma aresta (p,q) é colapsada calculamos $Q_r = Q_p + Q_q$ e avaliamos o erro em r como $r^T Q_r r$
- Q_r incorpora a soma dos quadrados das distâncias aos planos adjacentes a p e q

Medidas de Distância

•Quádricas de erro:

- A soma de quádricas superestima os erros porque planos podem ocorrer mais de uma vez na soma (no máximo multiplicidade 3)
- A estimação da distância a um triângulo pela distância a um plano subestima o erro
- Logo, quádricas não fornecem nem um limite superior estrito nem inferior estrito do erro
- São muito utilizadas pois permitem uma estimativa eficiente do erro e consomem pouca memória

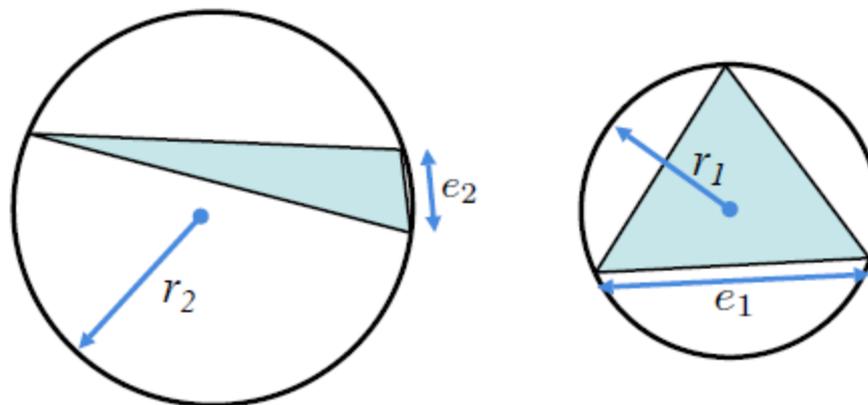
Adequabilidade (fairness)

- Na decimação incremental as medidas de erro permitem decidir se uma remoção é legal ou não (critério binário)
- É necessário utilizar outros critérios para efetuar uma ordenação (ranking) dos candidatos a remoção
- Um critério óbvio é usar a própria medida de distância
- É possível utilizar outros critérios

Adequabilidade (fairness)

- Equilátralidade: mede a razão entre o raio do círculo que circunscribe o triângulo e a menor aresta

$$\frac{r_1}{e_1} < \frac{r_2}{e_2}$$



Adequabilidade (fairness)

- Critério de suavidade: mede o máximo ou média do salto entre normais de triângulos adjacentes após a remoção
- Critério de cor ou textura: mede o desvio da textura ou cor após a decimação
- Critério diedral: mede o ângulo entre as normais de dois triângulos adjacentes antes e após o colapso de arestas. Se for próximo a 180 o colapso deve ser impedido

Método de Garland

- Inicialização

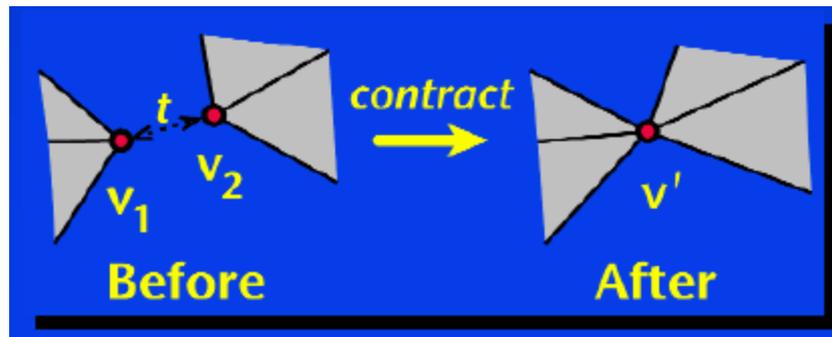
- Computar a quádrlica Q_p para cada vértice p
- Selecionar um conjunto S de pares de vértices (arestas ou não)
- Computar o candidato de custo mínimo para cada par de vértices do conjunto S

- Iteração

- Selecionar o par de menor custo (p_1, p_2)
- Efetuar o colapso da aresta (p_1, p_2) e calcular Q_r para o novo vértice r
- Atualizar todos os pares contendo p_1 e p_2

Método de Garland

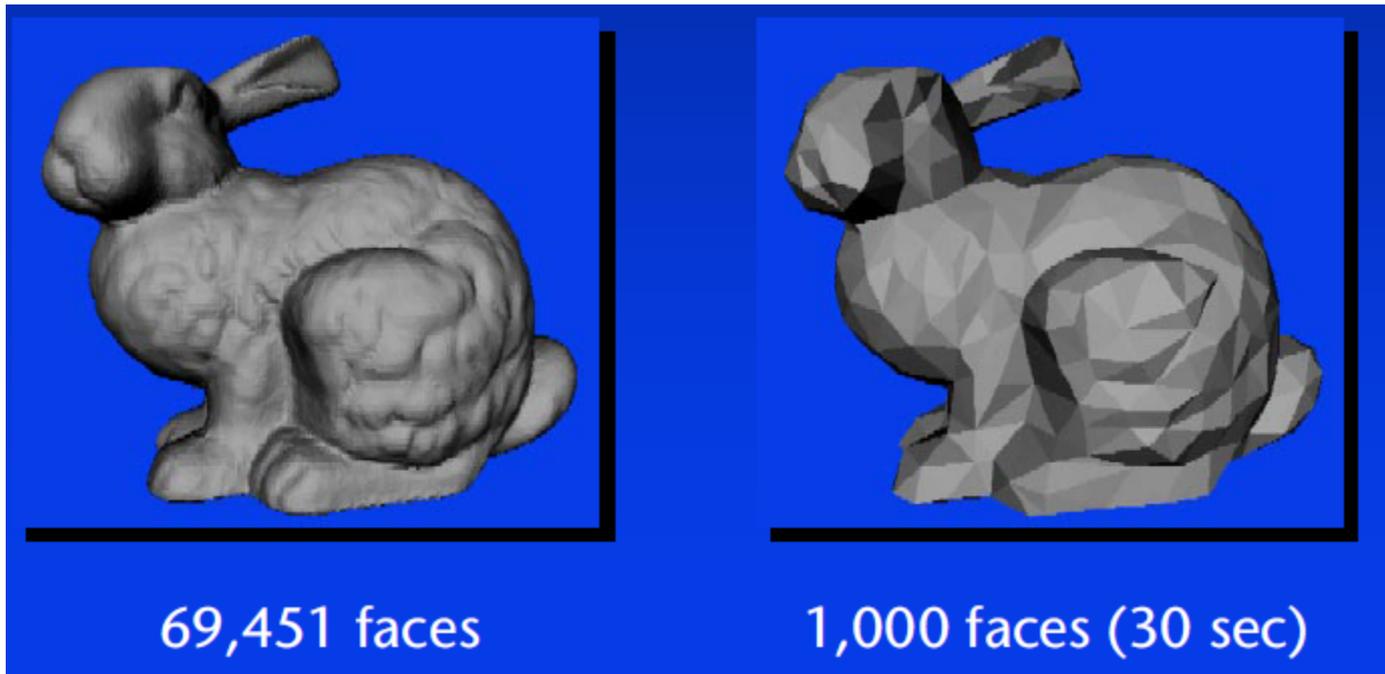
- O uso de pares que não formam arestas permite mudanças topológicas
- Selecionar pares que estão a uma distância menor que t



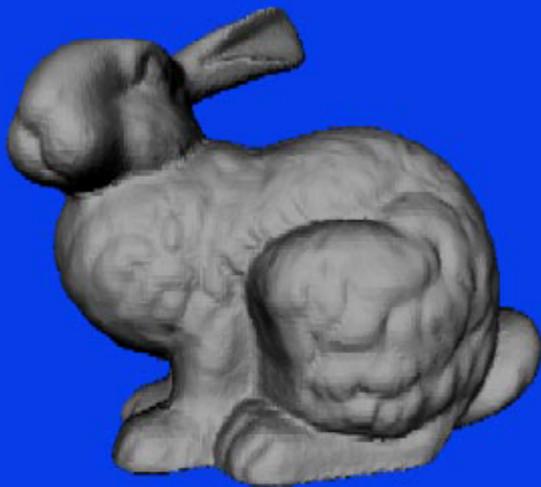
Método de Garland (detalhes)

- Fronteiras abertas que são engolidas:
- Para cada aresta na fronteira:
 - encontrar o plano contendo a aresta perpendicular ao plano
 - associar um peso grande e adicionar aos pontos extremos
- Colpaso da malha: checar as normais de triângulos adjacentes antes e após a remoção. Se houver flip rejeitar
- Métrica de erro dependente da malha inicial: ponderar as quádricas com a área dos triângulos

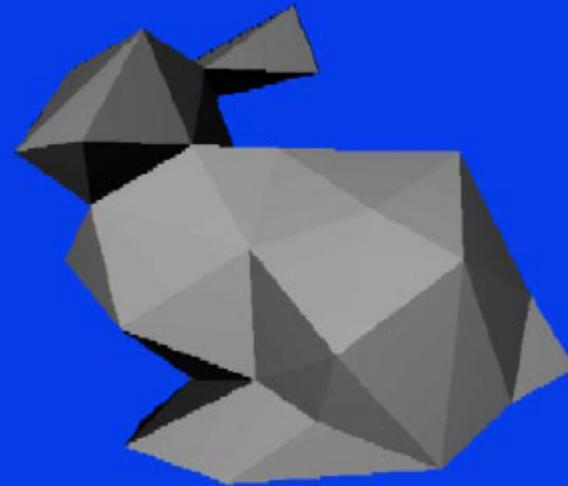
Método de Garland



Método de Garland

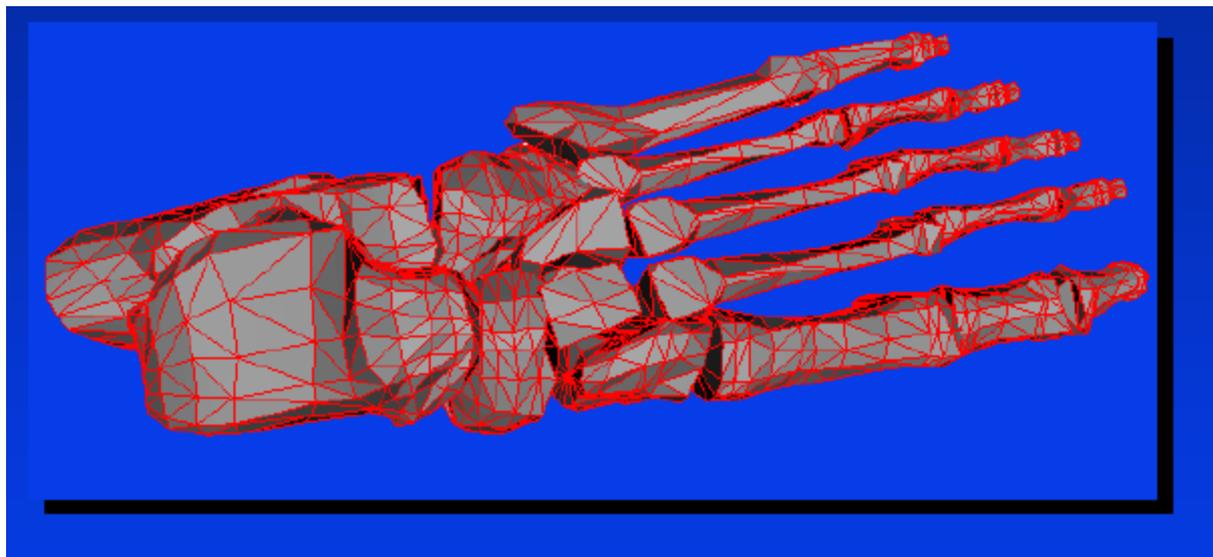


69,451 faces

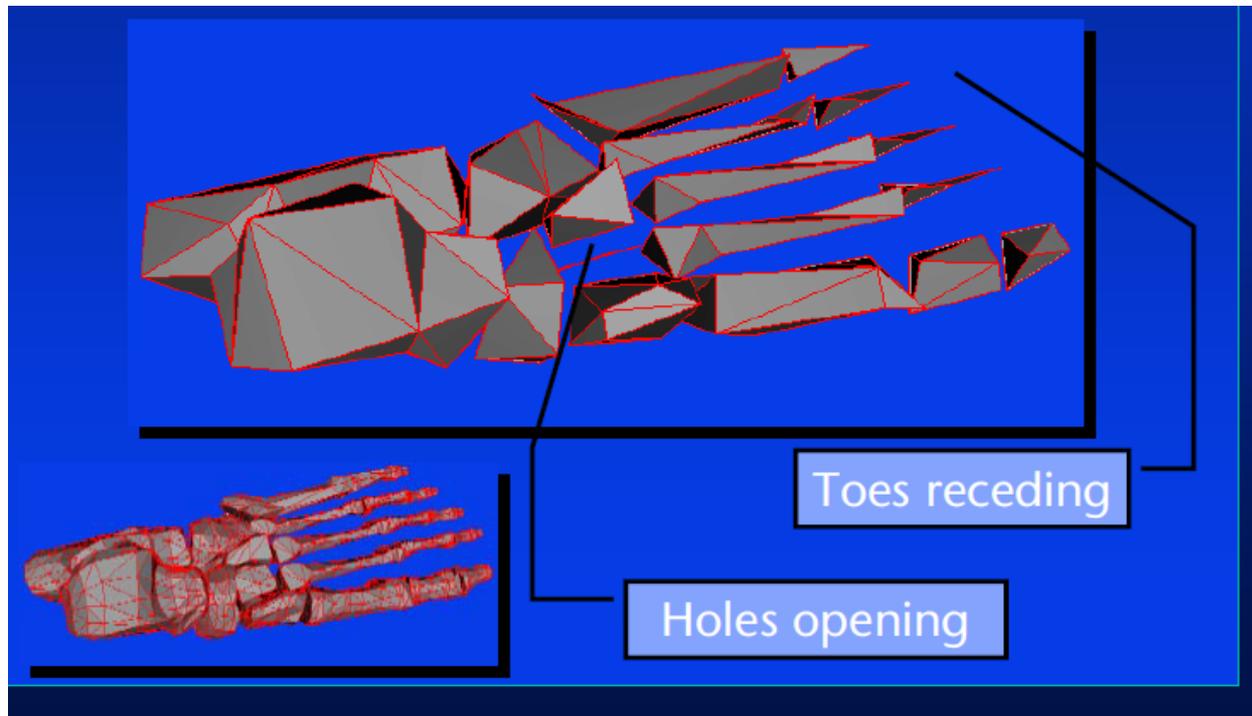


100 faces (30 sec)

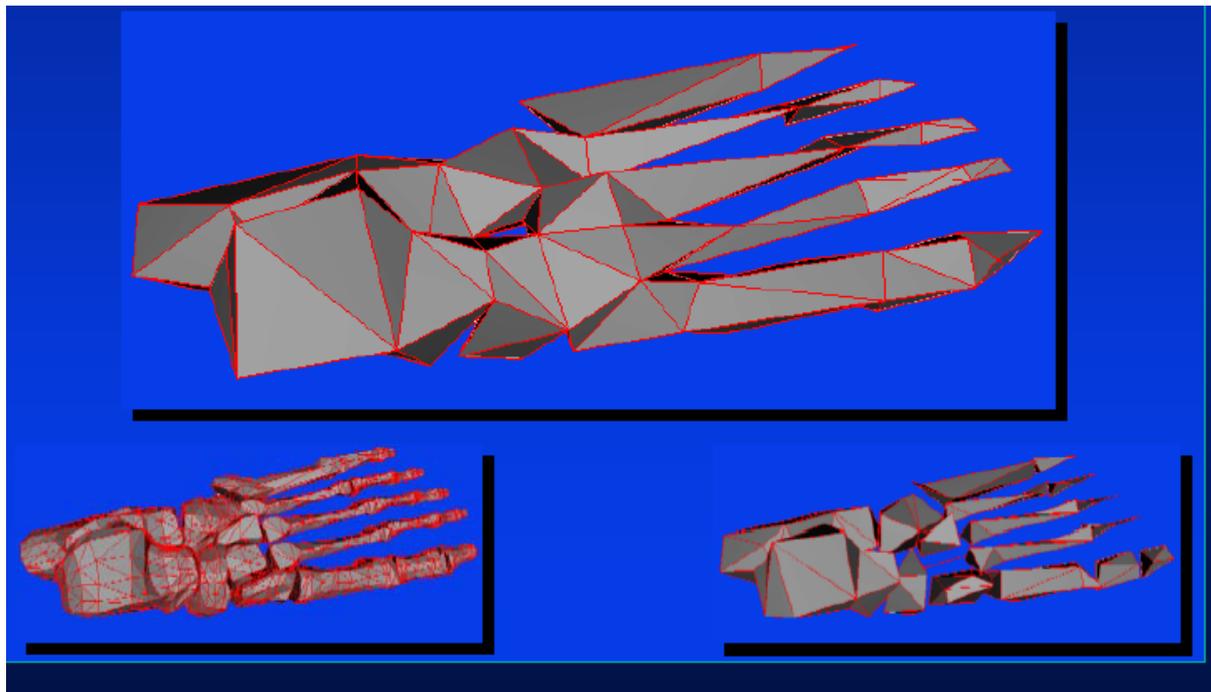
Método de Garland



Método de Garland (somente aresta)



Método de Garland (com pares não-aresta)



Método de Garland (critério de cor)

Before: $v = (x, y, z, 1)$ and Q is a 4×4 matrix

Now: $v = (x, y, z, r, g, b, 1)$ and Q is a 7×7 matrix



19,404 faces



1,000 face approximation



Four-faced Cluster Method

- Baseado nas operações Edge-weld (fusão de arestas) e Edge-flip (inversão de arestas)
- Edge-Collapse pode ser obtido com uma sequência de operações estelares, mas operações estelares são mais flexíveis (diferentes sequências de edge-flip podem ser aplicadas antes da edge-weld que simula a edge-collapse)
- Constrói uma hierarquia de malhas (M^0, M^1, \dots, M^n) com $M^0 = M$

Four-faced Cluster Method

- No passo de inicialização de cada nível j todos os vértices de M^{j-1} são marcados como válidos
- O algoritmo seleciona um vértice v para remoção. Vértices são selecionados considerando critérios de erro. Exemplo: quádricas
- Se v não possui valência 4 então uma sequência de edge-flips é aplicada até que a valência seja 4
- Os vértices no cluster de 4 faces são marcados como inválidos durante a geração do nível j
- O vértice de valência 4 é removido com uma operação de fusão de aresta (edge-weld)
- Quando todos os vértices forem marcados como inválidos o nível foi completado e começa a geração do nível $j+1$

Four-faced Cluster Method

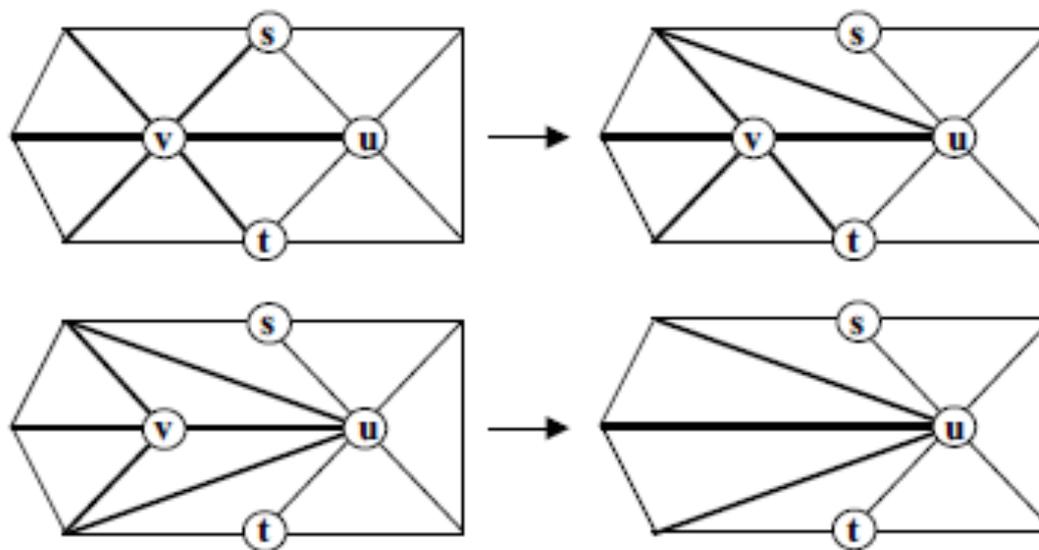
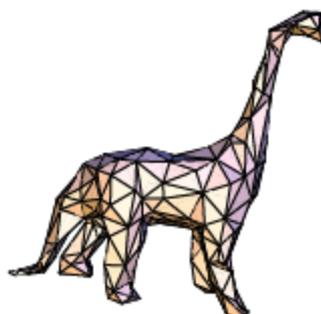


Figure 15: *Edge-Collapse decomposition*

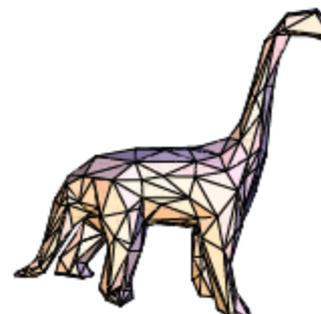
Four-faced Cluster Method



(a) Original: 7400 faces.



(b) Simpl.: 500 faces, $d = 4$.



(c) Simpl.: 500 faces, $d = 8$.



(d) Simpl.: 500 faces, $d = 12$.

Figure 1: *Simplification of the Dinosaur model with different random choice panel sizes.*

- L. Kharevych, B. Springborn, and P. Schröder. Discrete conformal mappings via circle patterns. *ACM Transactions on Graphics*, 25(2): 412-438, 2006.
- A. Sheffer and E. de Sturler. Surface parameterization for meshing by triangulation flattening. In *Proc. 9th International Meshing Roundtable (IMR 2000)*, 161-172, 2000.
- A. Sheffer, B. Lévy, M. Mogilnitsky, and A. Bogomyakov. ABF++: fast and robust angle based flattening. *ACM Transactions on Graphics*, 24(2):311-330, 2005.
- <http://alice.loria.fr/software/graphite/>
- <http://multires.caltech.edu/software/CircleParam/html/index.html>